Universidad Zaragoza

1542

Trabajo Fin de Máster

Probabilidad: una propuesta didáctica para 2º de Bachillerato.

Probability: a didactic proposal for the second year of Bachillerato.

Autor

Pablo Laliena Bernués

Director

Juan José Royo Espallargas

Facultad de Educación

2016

ÍNDICE

Introducción.

Normalmente, debido a la temporalización de los contenidos, los relacionados tanto con la Probabilidad como con la Estadística suelen verse relegados a un segundo plano, en el sentido de dotarles de menos importancia de la que deberían. Debido a esto la enseñanza de estos objetos matemáticos suele ser defectuosa pues la falta de tiempo suele implicar el dejar de enseñar contenidos o el centrarse en la adquisición de saberes en detrimento de la adquisición de conocimientos. Este hecho es especialmente negativo en estas ramas, donde la interpretación de los datos, resultados y técnicas que se usan, el saber "que se está haciendo" son necesarios para poder afirmar que se sabe probabilidad o estadística.

Esta es una de las principales razones por las que he elegido la Probabilidad de segundo de Bachillerato de la modalidad de Ciencias Sociales, donde considero que normalmente se suele optar por enseñar saberes en vez de conocimientos, debido en parte a la existencia de una prueba externa, las PAU. Además considero que tanto la Probabilidad y Estadística están en auge en el mercado laboral, debido al *big data*, por ello considero importante que los alumnos tengan una buena base de Estadística y Probabilidad, y cómo además consideró que es difícil entender la Estadística sin Probabilidad me he decantado por ello por este segundo objeto matemático.

A. Definición del objeto matemático a enseñar.

A.1-A.2 Nombra el objeto matemático a enseñar. Indica el curso y asignatura en el que sitúas el objeto matemático.

El objeto matemático a enseñar va a ser la **Probabilidad**, este objeto se introduce inicialmente en 3ºESO (según LOE) y en 1º-2º ESO (según LOMCE), pero en este caso nos centraremos en la Probabilidad que se enseña en 2º Bachillerato de la modalidad de Ciencias Sociales en la asignatura **Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II.**

A.3 ¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?

El campo de la Probabilidad es muy amplio y por ello siguiendo con lo establecido en el currículo autonómico los aspectos de la Probabilidad sobre los que trataremos serán:

-Definición de espacio muestral.

-Definición de sucesos; operaciones con sucesos.

-Definición de Probabilidad; Axiomática de Kolmogorov e idea intuitiva de Ley de los Grandes Números.

-Regla de Laplace.

-Propiedades de la probabilidad.

-Experimentos aleatorios simples y compuestos.

-Probabilidad condicionada e independencia de sucesos.

-Probabilidad Total.

Para que el alumnado sea capaz de asimilar estos contenidos, el campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas a este objeto matemático, y en particular asociadas a los aspectos que vamos a tratar, serán los siguientes:

Técnicas: Operaciones con sucesos; Propiedades de la Probabilidad derivadas de la Axiomática de Kolmogorov; Regla de Laplace; Experimentos aleatorios compuestos; Probabilidad condicionada y sucesos independientes; Teorema de la Probabilidad Total.

Tecnologías: Probabilidad condicionada; Sucesos independientes; Probabilidad de la unión de sucesos; Probabilidad del suceso complementario; Teorema de la Probabilidad Total; Teorema de Bayes.

Campo de problemas: Juegos de azar, problemas relativos a toma de decisiones y a la obtención de datos para ello.

No haremos mucho inciso en esto último de momento, pues en apartados posteriores veremos estos puntos más desarrollados, pero esto nos permite ponernos en situación sobre que contenidos son los que vamos a trabajar.

B. Estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático.

B.1 ¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?

Tomando como referencia los libros de texto en los que he investigado como se trata este objeto matemático (Nortes, A.(2003), Colera, J.(2003) y Escoreda, A. (2009)) y teniendo en cuenta las conversaciones que he mantenido con diferentes profesores que han dado esta asignatura, llego a la conclusión de que la introducción de este objeto matemático siempre se hace mediante la enunciación de un problema relacionado con los juegos de azar. Estos problemas generalmente son no triviales, en el sentido de que el problema necesita de un trabajo para poder ser resuelto, no se puede resolver a simple vista. Estos problemas abarcan diferentes juegos de azar, desde la ruleta Escoreda, A. (2009) hasta el juego de los chinos Nortes, A. (2003) pasando también por juegos en los que una cuadrícula y una moneda se ven involucrados Colera, J. (2003).

B.2 ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

A continuación analizaré brevemente que campos de problemas, que técnicas y que tecnologías se trabaja en la enseñanza de la Probabilidad en el curso de 2º Bachillerato de la modalidad de Ciencias Sociales. Para ello analizaré inicialmente cuales son los contenidos y criterios de evaluación que las leyes de educación han establecido, para después ver como diferentes libros de texto han tratado la enseñanza de este tema. A su vez también analizaré los contenidos de exámenes PAU pues consideró que pueden influir sobre todo en como los libros enseñan los objetos matemáticos que en este trabajo se tratan. Y por último comentaré brevemente si los contenidos que nosotros vamos a trabajar se ajustan a lo que dicen los currículos autonómicos (curso actual).

LOE Nacional.

Fijándonos ahora en las páginas 45476-45477 del BOE del 6/11/2007 donde quedan establecidos las enseñanzas mínimas en el currículo de Bachillerato podremos ver los contenidos referentes a la Probabilidad que se deben trabajar en el curso que a nosotros nos atañe. Aunque no aparece de forma explícita entendemos que los objetivos o bien son los mismos o muy similares que los que veremos en la LOE de Aragón. Los contenidos que se deberán trabajar son los siguientes:

-Profundización en los conceptos de probabilidades a priori y a posteriori, probabilidad compuesta, condicionada y total.

-Teorema de Bayes.

-Implicaciones prácticas de los teoremas: Central del límite, de aproximación de la Binomial a la Normal y Ley de los Grandes Números.

Contenidos que como podemos ver son coherentes con los criterios de evaluación establecidos en este mismo documento.

-Criterios de evaluación: "*Asignar probabilidades a sucesos aleatorios simples y compuestos, dependientes o independientes, utilizando técnicas personales de recuento, diagramas de árbol o tablas de contingencia. Se trata de valorar tanto la competencia para estimar y calcular probabilidades asociadas a diferentes tipos de sucesos como la riqueza de procedimientos a la hora de asignar probabilidades a priori y a posteriori, compuestas o condicionadas. Este criterio evalúa también la capacidad, en el ámbito de las ciencias sociales, para tomar decisiones de tipo probabilístico que no requieran la utilización de cálculos complicados."*

LOE Aragón.

Como se ve reflejado en las páginas 14140-14141 de la Orden de 1 de julio de 2008, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo del Bachillerato de la Comunidad Autónoma de Aragón (BOA 17/07/08) uno de los objetivos principales en la enseñanza de este objeto matemático es: "*Antes de obtener el valor numérico de la probabilidad de un suceso, el alumno debe adquirir destrezas en aspectos esenciales para la correcta interpretación del enunciado: descomposición de un suceso en sucesos simples, en la concreción del espacio muestral, en la caracterización de sucesos compatibles e incompatibles, en la determinación de la dependencia o independencia de sucesos, etc.*"

Entendemos además que este objetivo o algo similar es lo que se establece de forma implícita en el currículo LOE Nacional y que permite que los contenidos presentes en ambos documentos presentes diferencias poco significativas.

Esto se ve reflejado en los contenidos referentes al tema de Probabilidad que se deben impartir en este curso:

-Experimentos aleatorios simples y compuestos.

-Sucesos: operaciones con sucesos.

-Probabilidad. Probabilidad a priori y a posteriori: idea intuitiva de la ley de los grandes números.

-Determinación de la probabilidad de sucesos elementales y compuestos.

-Probabilidad condicionada.

-Independencia de sucesos.

-Probabilidad total. Teorema de Bayes.

Los contenidos que aparecen presentes en el documento Nacional y no en el de Aragón son: *Implicaciones prácticas de los teoremas: Central del límite, de aproximación de la Binomial a la Normal y Ley de los Grandes Números.*

Y los contenidos presentes en el documento de Aragón y no en el Nacional (hablamos de aparecer explícitamente): *Experimentos aleatorios simples y compuestos; Sucesos: operaciones con sucesos. Independencia de sucesos.*

Entiendo a pesar de ello que el no estar presentes estos apartados no implica una diferencia significativa entre ambos documentos, al menos en lo relativo a esos contenidos, pues al menos los contenidos que no aparecen explícitamente en el documento Nacional se han de ver si se quiere explicar los otros contenidos. Es decir las diferencias se encuentran en la enseñanza de las implicaciones prácticas del teorema central del límite y de la aproximación de la binomial a la normal. No así la Ley de los Grandes Números pues esta también aparece en el documento de Aragón, aunque entendemos que sí parece que se le da más importancia en el documento Nacional, pues en este aparece como implicaciones prácticas cuando en el de Aragón aparece como idea intuitiva.

Como podemos ver los contenidos del currículo de Aragón son coherentes con los criterios de evaluación con los que se pretende comprobar la consecución del objetivo principal:

"Asignar e interpretar probabilidades a sucesos elementales, obtenidos de experiencias simples y compuestas (dependientes e independientes), utilizando distintas técnicas. Este criterio pretende evaluar la capacidad de los estudiantes para realizar estudios probabilísticos en situaciones sujetas a alternativas derivadas del contexto económico o social. También se valorará la correcta aplicación de las técnicas personales de conteo: diagramas de árbol, tablas de contingencia, conteo directo, etc. Este criterio evalúa también la capacidad, en el ámbito de las ciencias sociales, para tomar decisiones de tipo probabilístico que no requieran la utilización de cálculos complicados."

Como se puede ver a pesar de las pequeñas diferencias existentes en los contenidos que acabamos de mencionar los criterios de evaluación no presentan ninguna diferencia, entendemos que esto es debido a que como hemos comentado los objetivos son a *grosso modo* los mismos.

Exámenes PAU:

Como se puede observar en la página web de unizar (página web oficial de la universidad de Zaragoza) en el apartado referente al programa de la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, es decir en el documento donde se presentan los contenidos que se exigirán en dicha prueba, estos contenidos son exactamente los mismos que se enuncian tanto en el BOE como en el BOA referentes al currículo de Bachillerato Social de la LOE.

Lo que haré a continuación será examinar varios exámenes de las PAU de diferentes años para ver qué tipo de problemas se presentan.

Analizando las preguntas referentes al tema de probabilidad de los exámenes PAU de 2011-2015 podemos afirmar que en general la prueba es muy estándar, en el sentido de que solo se presentan dos tipos diferentes de problemas (salvo alguna excepción), que eso si, permiten comprobar si el alumno ha cumplido con los objetivos programados en dicha asignatura. Estos problemas son aquellos que presentan alguna de las siguientes estructuras o similares:

a) Un experimento compuesto o simple de duración preestablecida, 2 etapas, 3 como mucho.

b) Una descripción de las características de una población y sus consecuentes posibles preguntas.

Aunque como veremos en el análisis de los libros de texto, este hecho hará que los libros se centren más en la adquisición de saberes haciendo especial hincapié en que los alumnos sean capaces de resolver dichos problemas tipo. Esto se puede ver reflejado en el ejemplo del **Anexo.**

Lo que quiero reseñar con esto es que tras analizar los diferentes exámenes PAU y los libros de texto llego a la conclusión de que las preguntas de las pruebas PAU relativas a la probabilidad sí que se adecuan al currículo oficial, pero desde mi punto de vista el hecho de que en los libros de texto se trabaje con ejercicios tan similares a los que luego se preguntan en las PAU hace que la enseñanza de la Probabilidad se centre más en la adquisición de saberes que en la adquisición de conocimientos. Si el problema yace en que en 2º Bachillerato solo se centra en la adquisición de saberes o que son las

PAU las que fuerzan esta metodología es un tema que no trataré en este trabajo por alejarse demasiado de nuestro objetivo.

Libros de texto.

Por último estudiaré 3 libros de texto editados en diferentes años o bien hechos por diferentes editoriales para hacer un estudio sobre la justificación de los objetos matemáticos que estamos tratando, sobre el campo de problemas y sobre las técnicas y tecnologías presentes en dichos libros.

SANTILLANA 2003:

Los dos problemas con los que introduce el tema y entiendo que son los problemas que pretenden dar una razón de ser a la enseñanza de la probabilidad son dos problemas relativos a la Lotería y al juego de los Chinos para 2 y 3 personas (este juego consiste en que 2 jugadores tienen 3 piedras en el bolsillo y han de sacar un número de estas al azar, el ganador es el que acierta el número de piedras).

Entenderemos por **técnicas** lo siguiente: Toda aquella fórmula, definición o idea que permita resolver los problemas y/o ejercicios o sirva de apoyo en la adquisición de conocimientos de alumno.

El orden en el que introduce las técnicas es el siguiente:

-Propiedades de sucesos (unión, intersección, complementarios). Leyes de Morgan.

-Axiomas de probabilidad (sin 3º axioma de Kolmogorov, hay una versión más simple en vez de este) y teoremas derivados de estos axiomas (el 3º axioma de Kolmogorov se trata como una consecuencia).

-Regla de Laplace.

-Probabilidad condicionada. Probabilidad producto de 2 sucesos.

-Sucesos independientes y condiciones para comprobar cuando estos lo son.

-Teorema de la Probabilidad Total y Teorema de Bayes (con el denominador sin haberle aplicado el Teorema de la Probabilidad Total).

Las tecnologías que introduce justifican con mayor o menor rigurosidad las siguientes técnicas:

-Regla de Laplace. Se basa en la equiprobabilidad de los sucesos.

-Probabilidad producto de 2 sucesos. Lo demuestra a partir de la probabilidad condicionada.

-Una de las condiciones para que dos sucesos sean independientes (demostración basada en la otra condición).

Con respecto al campo de problemas presente en este libro "definiremos" que se entiende por campo de problemas. Entenderé por campo de problemas aquellos ejercicios/problemas que sean problemas no estándar, es decir, todos aquellos que se alejen de la estructura antes nombrada (ver **exámenes PAU**) o tengan una estructura similar pero necesiten de una interpretación/reflexión del enunciado. Hago esto puesto que dichos problemas estándar que se podrían considerar problemas aparecen en todos los libros.

Los problemas que aparecen son los siguientes (solo copiare parte de los enunciados, las preguntas referentes a estos no puesto que se deducen de dichos enunciados):

-La persona A y B tienen 3€ respectivamente, la probabilidad de que A gane es de 0.6, en cada partida el perdedor le da 1€ al vencedor.

-Al salir 3 amigos de un bar cogen cada uno del perchero aleatoriamente uno de los 3 sombreros que hay y que ellos habían traído.

-Si en un dado la probabilidad de que salga una cara es proporcional al número de puntos de esta…

-La probabilidad de recuperar un globo sonda es de 1/9 si se lanzan 3 globos…

Como se puede observar en este libro no solo se pretende que el alumno adquiera una serie de saberes y los practique con los problemas estándar y con otros ejercicios, sino que también demuestre sus conocimientos en estos problemas, que no solo exigen la adquisición de una serie de saberes sino que también exigen unos conocimientos que les permitirán resolver dichos problemas, además de necesitar una reflexión y un entendimiento de la probabilidad para poder llegar a la solución.

ANAYA 2003

Es interesante la introducción de este libro sobre el tema, pues primero hace una introducción histórica en cuanto a autores importantes (sin explicitar que autor consiguió que) y comenta cuál fue la razón de ser histórica de este campo: los juegos de azar. Una vez hecho esta breve introducción plantea un problema que entiendo es el que pretende dar razón de ser al tema, aparte de la introducción ya hecha. Este problema trata de calcular la probabilidad de tirar una moneda sobre una cuadrícula y que esta no caiga sobre una línea. Merece la pena comentar que da una resolución "experimental" y otra matemática para que de este modo se haga explicita la utilidad de la probabilidad y se vea que esta no es algo ficticio o "inventado".

Como en el libro anterior enunciare a continuación las técnicas que presenta:

-Definición de sucesos, intersecciones, diferencias, complementarios e incompatibles.

-Propiedades de operaciones con sucesos: distributiva, simplificación, complementario.

-Definición formal de Ley de los Grandes Números. Axiomas de Kolmogorov sin la 3ª (da uno diferente).

-Probabilidad del complementario, del vacío, de un suceso B a partir de un suceso A contenido en este.

-3º axioma de Kolmogorov. Probabilidad de unión de sucesos.

-Regla de Laplace. Probabilidad Condicionada.

-Definición de sucesos independientes. Probabilidad en experimentos independientes y dependientes.

-Teorema de la Probabilidad Total y Teorema de Bayes.

Las tecnologías que aparecen a lo largo del tema y permiten justificar ciertas técnicas son las siguientes:

-Demostración de: $(A\cap B)^c = A^c \cup B^c$; mediante dibujo.

-Ligera justificación de porqué la frecuencia relativa tiende a estabilizarse a la probabilidad de dicho suceso.

-Demostración de la fórmula de probabilidad de unión de sucesos mediante la creación de sucesos independientes.

-Demostración de una de las condiciones de independencia de dos sucesos a partir de la otra condición.

-Demostración del Teorema de la Probabilidad Total a partir del 3º Axioma de Kolmogorov.

-Demostración del Teorema de Bayes a partir del Teorema de la Probabilidad Total.

Siguiendo la "definición" que hemos hecho antes del campo de problemas pondré los enunciados de dichos problemas:

-En una caja hay 2 bolas blancas y 3 bolas negras, gana el primero que saque una bola blanca (sin reemplazamiento, 2 jugadores).

-2 amigos han apostado 5€ sobre si tirando una moneda saldrá antes 5 veces cara o 5 veces cruz. Van 4caras y 3 cruces cuando se les pierde su única moneda. ¿Cómo reparten el dinero?

-Si con 3 dados el número de combinaciones sin importar el orden con las que puedes sacar 9 y 10 son las mismas. ¿Por qué las probabilidades son diferentes?

-¿Cuál es la probabilidad de que entre tus 5 amigos al menos 2 hayan nacido el mismo día de la semana?

-Probabilidad de sacar al menos un 6 en 4 tiradas de un dado. Probabilidad de sacar al menos un doble 6 en 24 tiradas de dos dados.

Como podemos observar por las técnicas, tecnologías y campo de problemas que aparecen en estos dos primeros libros son pocas las diferencias relevantes existentes. Con esto queremos decir que a pesar de que unas técnicas puedan aparecer en un libro si y en otro no, o aparezcan más “subtécnicas” (técnicas aplicadas en casos particulares deducibles de la general) no existe gran diferencia en este apartado. Sí que podría ser reseñable que en este segundo libro hay más tecnologías. Aun así no es una diferencia reseñable por la naturaleza de estas, la mayoría de demostraciones de ambos libros son consecuencias directas de técnicas.

A su vez el campo de problemas es similar por lo que en términos generales podemos deducir que ambos libros están enfocados a la adquisición de saberes aunque le dan bastante importancia tanto a la adquisición de conocimientos, como demuestra el campo de problemas, como al hecho de que los alumnos le den un sentido a las técnicas, refiriéndonos con esto a que el número de tecnologías es elevado. Algo que considero positivo pues aunque estas no se exijan, en cuanto a memorizarlas, sí que permitirá un mejor entendimiento de la materia y fomentará tanto la adquisición de conocimientos como un mayor desarrollo de procesos mentales, sobre todo en lo referente a la abstracción.

Hemos hecho especial inciso en las tecnologías y campo de problemas porque no todos los libros comparten esta idea de presentar contenidos.

SANTILLANA 2009 (Usado actualmente).

El problema con el que se introduce el tema de probabilidad es una pequeña historia sobre una abuela y su nieto apostando a la ruleta del casino. Les sale 3 veces el 0 en 10 tiradas siendo que como les hace notar un jugador el día anterior el 0 solo había salido una vez en todo el día anterior. A continuación se pide al alumno que haga un estudio de la probabilidad de que se den ambas situaciones.

Antes de comenzar a enunciar las técnicas merece la pena comentar que en este libro se explica lo que es el número combinatorio y se dan las fórmulas relativas a este y a las combinaciones en general antes de pasar a explicar los objetos matemáticos que a nosotros nos interesan.

Como en el libro anterior enunciare a continuación las técnicas que presenta relativas al objeto matemático que tratamos:

-Definición de: suceso elemental, compuesto, espacio muestral, suceso compatible/incompatible, seguro e imposible.

-Definición uniones, intersecciones, complementarios, diferencias de 2 sucesos.

-Sucesos complementarios y variaciones.

-Definición probabilidad (sin 3º axioma de Kolmogorov ni similar).

-Ley grandes números, significado más o menos.

-Regla de Laplace. Propiedades probabilidad.

-Experimentos aleatorios compuestos (diagrama árbol)

-Probabilidad condicionada (conteo). Regla del producto. Sucesos independientes.

-Probabilidad condicionada (con probabilidades). Sucesos independientes.

-Teorema de la Probabilidad Total y Teorema de Bayes.

Las tecnologías que aparecen a lo largo del tema y permiten justificar ciertas técnicas son las siguientes:

-Demostración de la probabilidad condicionada basada en el cambio de espacio muestra.

-Demostración implícita del Teorema de la Probabilidad Total usando para ello un dibujo.

Siguiendo la "definición" que hemos hecho antes del campo de problemas pondré los enunciados de dichos problemas:

-Ninguno.

Como se puede observar el libro más reciente es el libro más enfocado a las PAU y a la adquisición de saberes en detrimento de la adquisición de conocimientos (digo esto por el campo de problemas y tecnologías existentes en este libro en comparación con los otros). Por lo dicho anteriormente yo veo este libro como una colección de fórmulas que te permiten resolver una serie de problemas estándar. Lo más llamativo es lo siguiente, así como en todos los libros aparecen ejercicios resueltos donde te indican como resolver una serie de problemas estándar o muestran cómo aplicar una determinada fórmula, en este libro además hay una serie de ejemplos que los titula: *Hazlo así*.

Seguramente los ejercicios propuestos en todos los libros tengan como objetivo que el alumno lo haga de la forma en que se muestra, pero considero relevante que el único que utilice ese título sea el libro que menos tecnologías y campos de problema presenta.

B.3 ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?

Como es de suponer la enseñanza de los objetos matemáticos aquí tratados permitirá al alumno resolver toda la gama de "problemas estándar" con lo que esto conlleva: ser capaz de distinguir entre juegos de azar justos/injustos, tener una mejor noción del significado de la probabilidad y su utilidad y ser capaz de distinguir la información veraz de la falsa presente en las TIC, sobre todo aquella en la que dan datos de sucesos en función de otros.

Luego a pesar del enfoque de adquisición de saberes que tienen algunos de estos libros (no así el currículo LOE) el alumno también adquirirá conocimientos aunque en menor medida que saberes (al menos es la impresión que da tras el análisis que hemos realizado), todo dependerá tanto de la metodología del profesor como de la predisposición del alumnado en dar un paso más a la hora de trabajar la asignatura.

De todas formas la adquisición de saberes permitirá al alumno desarrollar su capacidad de abstracción, puesto que aunque sepa cuándo usar cada fórmula debe ser capaz de entender el enunciado del problema y debe poder traducir matemáticamente este, pues de otra forma no podrá aplicar las fórmulas.

Así mismo también le permitirá forjar la base necesaria para entender la estadística y le permitirá mejorar su toma de decisiones en la vida real sobre todo en aquellas situaciones en las que hay un factor aleatorio implicado.

C. Conocimientos previos del alumnado.

C.1 ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?

Teniendo en cuenta el tiempo disponible para dar todos los contenidos presentes en la asignatura Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II, considero que 11 clases son suficientes tanto como para poder dar el objeto matemático que en este trabajo tratamos, como para dejar tiempo suficiente para dar el resto de la asignatura. Partiendo de este hecho, los conocimientos previos que los alumnos necesitarían tener para poder dar el contenido antes nombrado en este tiempo serían los siguientes:

-Definición de espacio muestral.

-Definición de sucesos.

-Propiedades básicas de Probabilidad. Axiomática de Kolmogorov.

-Regla de Laplace.

-Probabilidad condicionada. Sucesos dependientes e independientes.

-Entendimiento del funcionamiento de experimentos simples y compuestos.

Estos conocimientos no deberían ser nuevos para el alumnado al menos teniendo en cuenta lo exigido por los diferentes currículos, pero en todo caso consideramos necesario volver a definirlos y recordarlos.

C.2 La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?

A continuación haremos una breve enumeración de lo exigido por el currículo LOE en cursos anteriores al que vamos a tratar en lo referente a la Probabilidad y que hayan afectado a nuestro alumnado (suponemos que enseñaremos este objeto matemático en el curso actual).

-En Matemáticas de 3ºESO, LOE:

-Experiencias aleatorias. Sucesos y espacio muestral. Imprevisibilidad y regularidad. Frecuencia relativa y probabilidad de un suceso: estabilidad de las frecuencias. Cálculo de probabilidades mediante la ley de Laplace. Utilización de distintas técnicas de recuento: tablas, diagramas de árbol, etc. Probabilidad de sucesos compatibles, incompatibles y contrarios. Formulación y comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos. Cálculo de la probabilidad mediante la simulación o experimentación.

-En Matemáticas de 4ºESO Opción A, LOE:

-Experimentos aleatorios y sucesos. Experiencias aleatorias simples y compuestas. Asignación de probabilidades en experiencias simples mediante recuento: ley de Laplace. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para el recuento de casos y la asignación de probabilidades. Probabilidad del suceso contrario. Probabilidad condicionada. Probabilidad total. Probabilidad estadística.

-En Matemáticas de 4ºESO Opción B, LOE:

-Igual que en Opción A pero incluyendo la probabilidad del suceso contrario.

-En Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I de 1ºBachillerato, LOE:

-Distribuciones de probabilidad. Variables aleatorias: asignación de probabilidades a sucesos; probabilidad compuesta y condicionada. Variables aleatorias discretas: la función de probabilidad; cálculo de parámetros. Y más contenidos relativos a la distribución binomial que "no nos interesan".

C.3 ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?

A raíz de este análisis se puede concluir que al menos teóricamente todo el alumnado debería poseer dichos conocimientos previos pues en mayor o menor medida los ha tenido que ir viendo a lo largo de su vida escolar. Es decir al menos teóricamente los currículos sí que han propiciado la adquisición de dichos conocimientos, como acabamos de ver. Pero la realidad que yo creo que existe actualmente es que el tema de Probabilidad al igual que el de Estadística son los últimos en ser presentados en los diferentes cursos por lo que considero imprescindible tomar las siguientes dos decisiones:

1. Crear una serie de actividades que me permitan averiguar que conocimientos han llegado a adquirir verdaderamente el alumnado.

2. Volver a definir y trabajar estos contenidos en forma de repaso para después relacionarlos con los nuevos contenidos. Este trabajo por tanto se hará a lo largo de todas las sesiones según se vaya avanzando.

Un ejemplo de actividades que les pondría para averiguar si efectivamente tienen los conocimientos previos que sería ideal hubieran adquirido serían las siguientes:

Actividad 1. Problema 2. Este problema inicial va a tener doble función para nosotros. Nos servirá tanto para darle una razón al hecho de estudiar probabilidad (algo que también hará el otro problema) como para averiguar cuál es el nivel del que parte nuestro alumnado, es decir, también nos servirá para ver el verdadero nivel de la clase.

El problema es el siguiente:Supongamos que queremos hacer un sorteo con los números desde el 000-119 ambos incluidos de manera que la probabilidad de que salga cada número sea exactamente la misma, es decir 1/120 es la probabilidad de que salga el 001, el 113, etc. Si nuestro sorteo cumple esto diremos que es un sorteo equiprobable pues cada suceso elemental tiene exactamente la misma probabilidad de salir.

Como no queremos escribir 120 números en 120 papelitos/bolas se nos ocurren dos posibles formas más rápidas para hacer el sorteo. Para ambas escribiremos los números del 0-9 en 10 bolas.

Sorteo A- Cogemos una bola al azar del 0-9 que determinará las unidades. Cogemos otra bola al azar del 0-9 que determinará las decenas. Dependiendo que número haya salido sortearemos el 0-1 o no. Es decir, si tenemos el ¿67 no hace falta sortearlo pues solo el número 067 es válido luego ese es el ganador. Si nos hubiera salido el ¿13 entonces sí que haría falta sortearlo.

Sorteo B- Cogemos una bola al azar del 0-9 que determinará las decenas. Cogemos otra bola al azar del 0-9 que determinará las unidades. Y por último cogemos una bola al azar del 0-1 que determinará las centenas. En caso de que nos salga un número "imposible" repetiremos el sorteo desde el principio.

Ante este enunciado, las preguntas que proponemos y que conjunto a las otras actividades nos permitirán averiguar el nivel de la clase son las siguientes:

a) Define con tus palabras el significado de espacio muestral y escribe cuál es en este caso.

b) Define con tus palabras el significado de suceso elemental y compuesto y pon un ejemplo (para cualquiera de los sorteos).

c) Dibuja mediante un diagrama de árbol cómo se desarrolla cada uno de los sorteos.

d) ¿Qué suceso tendrá probabilidad 1?, ¿Qué valores puede tomar la probabilidad de cualquier suceso (en general, no en este problema en concreto)?

e) Recordando que dos sucesos son incompatibles si la intersección de estos es el vacio, es decir, si no tienen ningún resultado en común. Si en el sorteo A la probabilidad de que salga el número X ó Y es 0,01 , y la de que salgan los números Z ó W es 0,005 (con X,Y,Z y W diferentes) ¿Qué probabilidad hay de que salga alguno de los anteriores números?

f) Calcula cuál de los sorteos es equiprobable. Una vez hecho esto si compraras los números del 0-53 del sorteo equiprobable, ¿cuál es la probabilidad de que ganes?

NOTA: Sería recomendable resolver este ejercicio en grupos de 2, de forma que cada uno estudie un sorteo.

La idea de esta actividad es que el profesor dé el enunciado de este problema, y que una vez hecho esto deja a la clase trabajar durante 10 minutos mientras va pasando mesa por mesa para ver cómo se va desarrollando la actividad. Dependiendo de la cantidad de contenidos que los alumnos recuerden el profesor deberá o bien dar el mismo los resultados o bien recordar aquellos contenidos que los alumnos deberían conocer para poder ser capaces de resolverlos. Dependiendo de cómo se desarrolle la actividad esta podrá durar hasta 30 minutos.

Salvo sorpresa (que todo el alumnado tenga los conocimientos previos antes mencionados), será necesario explicar la mayoría de estos conocimientos, por lo que esta actividad nos servirá para recordarlos a la vez que se trabajan inmediatamente.

Actividad 2. El objetivo con esta actividad será comprobar si ya se han recordado/adquirido los conocimientos trabajados en la actividad anterior, a la vez que comprobamos si los alumnos conocen tanto lo relativo a Probabilidad Condicionada cómo el significado de sucesos dependientes e independientes. A su vez esta actividad será para volver a trabajar, solo que de forma más "leve" lo trabajado en la actividad anterior.

El enunciado de esta actividad será el siguiente: Supongamos que tenemos una baraja española y que sacamos una carta al azar:

a) Escribe un suceso simple y un suceso compuesto.

b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una figura?

Supongamos que ahora sacamos una carta al azar, la apuntamos, la volvemos a meter y sacamos una segunda carta:

c) ¿Cuál es la probabilidad de sacar un oro en la primera carta? ¿Cuál es la probabilidad de sacar una copa en la segunda carta?

Sabiendo que dos sucesos A y B son independientes si cumplen que:

d) $P(A \cap B)=P(A)P(B)$, ¿Son los dos sucesos anteriores independientes?

Nota: Es recomendable que hagas un dibujo sobre el procedimiento de sacar cartas que estamos siguiendo.

Supongamos que ahora sacamos una carta al azar, y sin volver a meterla sacamos una segunda carta:

e) Sabiendo que la primera carta que hemos sacados ha sido oros, ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda carta sea también de oros? Realiza este apartado usando la fórmula de la Probabilidad Condicionada: $P(B|A)=P(A\cap B)/P(A)$ y usando la regla de Laplace para calcular $P(A\cap B)$.

f) ¿Y si la primera carta que hemos sacado hubiera sido de copas?

Esta segunda actividad se realizaría siguiendo la misma metodología que antes.

Estas dos actividades unidas a la institucionalización de los contenidos previos y en general al repaso de los conocimientos previos se harán de forma continua en las sesiones. Aunque tano la actividad 1 como la 2 tendrá una fecha fijada que nos servirá para averiguar que conocimientos previos tienen y para comprobar que los han adquirido (una vez institucionalizados), la idea es que se vayan repasando los conceptos que ya deberían saber mientras se van introduciendo los nuevos, es decir lo que pretendemos es relacionar sus conocimientos previos con los nuevos contenidos.

Mencionar que independientemente de que conozcan o no la probabilidad condicionada, se hará especial hincapié en este aspecto pues será clave para poder entender los nuevos contenidos.

En el hipotético caso de que los conocimientos previos del alumnado fueran más deficientes de lo esperado, algo que se debería poder detectar con la primera actividad en los primeros 10-15 minutos, se detendría esta actividad y se empezaría directamente a trabajar los contenidos, institucionalizando los conocimientos previos a la vez que se introducen los nuevos.

D. Sobre las razones de ser del objeto matemático.

D.1-D.2 ¿Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático? ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

La razón de ser elegida para justificar la introducción de los objetos relacionados con nuestro objeto matemático escogido, la Probabilidad, será exactamente la misma razón que hizo surgir este campo; los juegos de azar y también el mejorar la toma de decisiones y la obtención de datos para ello. A pesar de que es de sobras conocido que el origen histórico de la Probabilidad es este, los juegos de azar, me parece necesario justificarlo mediante la extracción de diferentes partes de diferentes fuentes. Por ejemplo en la revista SUMA se dice: “*El mismo concepto de probabilidad puede tener una doble vertiente, epistemológica y aleatoria, pero ambas aparecen sugeridas por un fenómeno muy antiguo: los juegos de azar”* o en Wikipedia donde se dice sobre la Probabilidad que: *"Es notable que una ciencia que comenzó con consideraciones sobre juegos de azar haya llegado a ser el objeto más importante del conocimiento humano"*. A pesar de que la historia de los juegos de azar se remonta hasta cientos de años antes de cristo,son muchos historiadores los que consideran que el nacimiento de la Teoría de la Probabilidad no fue hasta 1654, año en el que Fermat y Pascal establecen contacto vía cartas para discutir el famoso problema de los puntos y el problema del caballero de Meré (se planteaba porqué ganaba más veces apostando a que al tirar un dado 4 veces salía al menos un 6 que apostando a que salía al tirar 24 veces dos dados al menos un doble 6) entre otros y cuyas soluciones tuvieron un grandísimo impacto sobre el campo conocido como Probabilidad. Un ejemplo de este problema de los puntos sería el siguiente: A y B juegan a lanzar una moneda, el acertante suma un punto, y el perdedor ninguno, gana el primero en obtener 5 puntos; han apostado 10 ducados cada uno pero cuando van 4-3 han de parar el juego. ¿Cómo deberían repartirse los 20 ducados?

D.3 Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.

La razón de ser antes mencionada se verá representada mediante la introducción de dos problemas que trataran sobre juegos de azar, de modo que para poder responder a una serie de preguntas sobre estrategias ganadoras o características de estos problemas sea necesario introducir los aspectos relacionados con nuestro objeto matemático.

Los problemas que hemos elegido como constituyentes de la razón de ser de nuestro objeto matemático son los siguientes:

Problema 1: Problema de los puntos: A y B juegan a lanzar una moneda, el acertante suma un punto, y el perdedor ninguno, gana el primero en obtener 5 puntos; han apostado 10 ducados cada uno pero cuando van 4-3 han de parar el juego.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que B(3) hubiera ganado?

b) Suponiendo que A ha ganado, ¿Cuál es la probabilidad de que haya perdido la ronda 8?

Si en vez de ir 4-3 fueran, 3-2:

c) ¿Cuál es la probabilidad de que A gane?

d) ¿Sabiendo que A ha ganado, cuál es la probabilidad de que haya perdido la ronda 6?

Problema 2: Ver Actividad 1.

a) ¿A qué conjunto de números apostarías en el sorteo no equiprobable?¿Qué probabilidad de salir tienen cada uno de esos números?¿Que probabilidad de salir tiene cada número "malo" (menos probable)?

b) Si hubieras comprado el número 112 y 012 ¿Qué sorteo te beneficiaría más que se hiciera? ¿Y si hubieras comprado el 19-20-21?

Estas cuestiones no se incluyeron en la actividad 1 debido a su complejidad, pero se trabarán en algún momento de las sesiones, bien para motivar la introducción de diferentes objetos matemáticos o bien para comprobar si el alumnado va adquiriendo conocimientos.

Estos problemas se eligieron por dos razones, la primera porque los consideramos lo suficiente atractivos como para poder representar la razón de ser que habíamos elegido, y la segunda es que son problemas que tienen la característica de que dependiendo de las preguntas que se le hagan pueden hacer surgir diferentes contenidos matemáticos y por tanto pueden ser usados continuamente como referencia.

D.4 Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Los problemas se introducirían en el aula de la siguiente manera; como ya hemos visto el Problema 2 coincide con la actividad 1, y la metodología que se usará para trabajar con él ya ha sido comentado brevemente en el apartado C. Como ya hemos comentado este problema se presentaría el primer día de clase teniendo como objetivos el introducir el objeto matemático que vamos a tratar y el averiguar cuál es el nivel actual de la clase en lo relativo a los conocimientos previos que consideramos es necesario que los alumnos tengan. La metodología que seguiremos es en esencia lo que hemos comentado anteriormente. Primero se presentaría a la clase, dándoles varios minutos de margen para cualquier duda que pudieran tener relativa al entendimiento del enunciado. Una vez presentando se dejaría al alumnado trabajar solos durante 10 minutos, pasando mesa por mesa para controlar que dudas surgen y como se va desarrollando la actividad, recordar que esta actividad está planteada para que los alumnos trabajen por parejas, ya que consideramos que de esta forma es más probable que afloren los conocimientos previos del alumnado. Como ya se ha comentado, esta actividad durará un máximo de 30 minutos.

Dependiendo de cómo se hayan desarrollado estos primeros minutos se continuará trabajando este problema de diferente manera, dependiendo de la cantidad de conocimientos previos que los alumnos hayan demostrado conocer. En caso de que los primeros minutos arrojen resultados positivos, se les dejará continuar trabajando, corrigiendo de poco en poco los apartados en la pizarra que la clase haya ido haciendo.

En caso de que haya unas pocas dificultades se irá dando pistas al alumnado, o se irán recordando los conceptos de forma que les permitan seguir trabajando de formas más o menos fluida en las preguntas.

Y en el peor de los casos, se pararía la resolución de este problema para institucionalizar los contenidos previos y se empezarían a ver también los nuevos contenidos relacionados con estos.

En cuanto al Problema 1 se introduciría al comienzo de la sexta clase, una vez que estemos seguros de que el alumnado ya posee los conocimientos previos requeridos y algunos nuevos para poder introducir los de mayor complejidad, de forma que los alumnos vean que no tienen herramientas suficientes para resolver este problema y que por tanto es necesaria la introducción de nuevos contenidos. Este problema se tendrá en mente a lo largo del resto de las clases en las que se introduzcan los contenidos nuevos, sobre todo el Teorema de la Probabilidad Total, y se tomará como referencia a la hora de ejemplificar el uso de los nuevos contenidos siempre que sea posible.

E. Sobre el campo de problemas.

E.1-E.2 Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula. ¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?

Las características que tendrán los problemas que pretendo presentar a la clase son tanto el hacer aflorar los diferentes contenidos que pretendemos trabajar como el mejorar la interpretación de los enunciados y resultados. Para ello los campos de problemas elegidos que se irán representando en las distintas clases, siempre que el ritmo de la clase lo permita, serán los siguientes:

Tipo 1: Son problemas cuyo objetivo es el de mejorar la interpretación de los enunciados y de las soluciones/resultados que se obtienen al trabajar estos problemas.

Ejemplo, problema 1: Problema de Monty Hall. Estas en la prueba final de un concurso de televisión donde te dan a elegir entre 3 puertas, en 1 de ellas habrá un coche y en las otras dos una cabra. Después de haber elegido una puerta, el presentador abre una de las otras 2 y te muestra una cabra. A continuación te da la opción de cambiar de puerta. ¿Deberías cambiar?¿Porqué?

La idea de este problema es que el alumnado haga una tabla con los posibles escenarios, calcule cuál va a ser la acción ventajosa mediante la regla de Laplace y le intente dar un significado a este hecho no trivial. Además se podrá presentar al alumnado una solución alternativa en la que se use el Teorema de la Probabilidad Total. Este problema no presenta modificaciones con respecto a las técnicas iniciales, pero si exige de un proceso de razonamiento avanzado.

Ejemplo, problema 2: Un trielo es un duelo donde intervienen 3 personas. En este caso tenemos a Daniel que acierta 1/3 veces, a Juan que acierta 2/3 veces y Antonio que acierta siempre. Dispararán del más malo al mejor. ¿Qué tiene que hacer Daniel para aumentar sus posibilidades al máximo de ganar?

Para la resolución del problema se usará el diagrama de árbol pero además incluirá toma de decisiones (de forma intuitiva, no formal), y además las posibles ramificaciones no serán tan directas de ver como en los que se verán de forma habitual en clase. El objetivo es que los alumnos se den cuenta que Daniel tiene más probabilidad de ganar si falla el primer tiro, para ello primero deberán demostrar que son capaces de visualizar todos los escenarios posibles y deberán ser capaces de hacer un cálculo aproximado de que probabilidades tiene Daniel de ganar. Al igual que el problema anterior el objetivo es que el alumnado mejore su capacidad de razonamiento y de interpretación del enunciado y de los resultados.

Tipo 2: Este campo de problemas tiene como objetivo tanto el trabajar los conocimientos previos mencionados anteriormente como el trabajar tanto las propiedades de la probabilidad como el de las operaciones con sucesos.

Ejemplo, problema 3: En una feria ves el siguiente juego que consiste en lo siguiente. En un barril tapado (no se puede ver lo que hay dentro) de capacidad 100 bolas (50 transparentes y 50 opacas) tienes 40 rojas, 36 azules, 20 verdes y 4 negras (mitad transparentes y mitad opacas). La persona que apuesta (tú) debe sacar una bola y puede hacer solo una de las siguientes afirmaciones, si aciertas ganas :

-La bola será roja y opaca.

-La bola no será transparente ni verde.

-La bola no será ni azul ni negra.

-La bola será verde o azul.

-La bola no será azul ni verde.

Pensando en las mejor estrategia desde el punto de vista de la probabilidad:

a) ¿Qué afirmación deberías hacer?

b) ¿Qué afirmación no deberías hacer?

c) Si te dejaran hacer dos afirmaciones a la vez, ¿Cuáles serían?

d) Si te dejaran hacer 2 afirmaciones de entre las 3 primeras, ¿Cuáles deberías hacer?

e) ¿Y si en vez de afirmar negaras, cuál sería la mejor?(Usar datos apartado A).

f) Sabiendo que la bola que has sacado es opaca, ¿Cuál es la probabilidad de que sea roja?

En este problema se trabajarían tanto las operaciones con sucesos como las propiedades de la probabilidad. Será necesario por tanto que el alumnado comprenda el enunciado, lo transcriba al lenguaje matemático y sea conocedor de las propiedades/técnicas antes mencionadas. Inicialmente no presenta ninguna modificación de las técnicas iniciales.

Tipo 3: Este tipo de problemas tiene como objetivo poner en uso las técnicas de la probabilidad condicionada y del teorema de la probabilidad total pero en un entorno en el que el alumnado pueda sacar las soluciones mediante otro método "más sencillo", como la regla de Laplace, de modo que al haber obtenido la solución con dicho método se sienta más cómodo trabajando con las técnicas más nuevas para él. Además trabajarán de forma explícita el aspecto de sucesos independientes.

Ejemplo, problema 4: Un día, mientras estas aburrido en casa se te ocurre la idea de crear un juego de azar en el que estén incluidos varios dados, pero para saber que cuotas poner por cada acierto de forma que te salga rentable jugar te das cuenta que necesitas poder responder a las siguientes preguntas, ya que si no es muy probable que pongas malas cuotas y salgas perdiendo dinero.

a) ¿Qué es más probable sacar un 5 en un dado de 6 caras o sacar un 5 en un dado de 8 caras sabiendo que solo las tiradas en las que sale un número impar son válidas (esta condición solo para el dado de 8 caras)?

b) Si al tirar un dado sacas un 4, ¿cuál es la probabilidad de que al tirar un segundo dado la suma de los números sea mayor que 7? ¿Son estos dos sucesos independientes?

c) Sabiendo que se han tirado 2 dados y la suma ha sido mayor que 9, ¿Cuál es la probabilidad de que en el primer dado haya salido un 5?

Este problema si podría considerarse que presenta alguna modificación con respecto a la técnica inicial, puesto que el apartado C esté pensado para que se resuelva aplicando el Teorema de Bayes, que habrá salido en clase como consecuencia del Teorema de la Probabilidad Total, por lo que se puede considerar una modificación de la técnica.

Este problema tendrá una metodología diferente a los demás puesto que los alumnos no deberían tener problemas en responder a las preguntas mediante el uso de la Regla de Laplace, por lo que una vez lo hayan resuelto por este método se les pedirá que comprueben mediante otros métodos que el resultado que han obtenido es el correcto y el mismo.

Tipo 4: En este tipo de problemas (solo se presentará en clase 1 de este tipo, dos como mucho) el alumnado debe saber aplicar la técnica de la Probabilidad Condicionada y la Probabilidad Total a la vez que deben saber entender el enunciado y los datos presentes en este.

Ejemplo, problema 5: Cierta enfermedad llamada, síndrome C afecta a un 0,4 % de la población. Debido a la mortandad que presenta este síndrome se ha ideado un test que arroja las siguientes estadísticas: un 1% de las veces que sale positivo (positivo indica que la persona posee el síndrome) es un falso positivo (en realidad no lo posee) y un 0,5% de las veces que sale negativo (negativo indica que la persona no posee el síndrome) es un falso negativo (en realidad no lo posee).

¿Cuál es la probabilidad de que ha una persona que le haya salido positivo presente dicho síndrome?

Este problema inicialmente no presenta ninguna variación de la técnica. Sí que requiere de un gran entendimiento del enunciado y de la interpretación de resultados; en este problema también se pueden usar técnicas como el Teorema de Bayes que si puede ser considerada una modificación de la técnica aunque se usaría más bien a modo de comprobación.

E.3 Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

-Presentación del problema y ronda de preguntas sobre cualquier duda que el enunciado de este haga surgir. El trabajo será en grupo de 2 personas o si algún alumno lo prefiere, individualmente.

-Dejar unos 8 minutos a los grupos para que vayan pensando ideas iniciales, ir preguntando qué es lo que se les ha ocurrido, en caso de que algún grupo haya dado con la idea correcta que la exponga en voz alta (la idea/procedimiento de resolución).

-En caso de que ningún grupo de con la idea correcta (será lo habitual) dar algunas pistas clave que puedan hacer surgir dicha idea. Dejarles trabajar otros 8 minutos.

-En caso de que ningún grupo de con la idea correcta, enunciar cuál es el procedimiento a seguir y porqué. Ronda de preguntas sobre cualquier duda que este procedimiento pueda hacer surgir. Dejar a los alumnos resolver el problema mediante el procedimiento enunciado. Dejarles trabajar unos 5-7 minutos dependiendo del problema.

-Resolver el problema en la pizarra y preguntar a los que no les coincida el resultado que han hecho, los errores cometidos por los alumnos pueden dar pie a nuevas explicaciones o a repasar conceptos que estos no hayan adquirido tan bien como suponíamos.

F. Sobre las técnicas.

F.1-F.2-F.3 Diseña los distintos tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula. ¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos? Dichas técnicas ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?

Recordar que las técnicas o conocimientos que pretendemos que el alumnado posea al concluir el proceso de enseñanza-aprendizaje de esta unidad son las siguientes:

Técnica 1: Operaciones con sucesos (unión, intersección, diferencia y complementario).

Técnica 2: Propiedades de la probabilidad derivadas de la Axiomatica de Kolmogorov (probabilidad del complementario y probabilidad de la unión).

Técnica 3: Regla de Laplace.

Técnica 4: Experimentos aleatorios compuestos; diagrama de árbol.

Técnica 5: Probabilidad condicionada, y sucesos independientes (fórmula del primero y características del segundo).

Técnica 6: Teorema de la probabilidad total (fórmula).

Estas técnicas se adecuan al campo de problemas asociado a la Probabilidad, este hecho se ve reflejado en que para poder resolver dicho campo es necesario ser conocedor de dichas técnicas, como hemos podido comprobar en el apartado **E**.

A continuación pondré una serie de ejemplos de ejercicios que se trabajarían en clase y que permitirían al alumnado ejercitar dichas técnicas. En general ninguno presenta ninguna modificación de la técnica.

Ejercicio tipo 1: En una baraja española deseamos calcular la probabilidad de los siguientes sucesos si sacamos una única carta al azar. Valiéndote de la Regla de Laplace y de las propiedades de los sucesos calcula:

a) Probabilidad de que sean oros.

b) Probabilidad de que no sean oros.

c) Probabilidad de que sea una figura.

d) Probabilidad de que sea una figura pero no copas.

e) Probabilidad de que sea una figura o un basto.

f) Probabilidad de que no sea espadas o no sea una figura.

En este tipo de ejercicios se trabajarían las **Técnicas 1,2 y 3.**

Ejercicio tipo 2: Suponer que A y B son los dos de un experimento cualquiera. Sabemos que P(A)= 0.5, P(B)=0.3, P(B|A)= 0.5

a) ¿Son A y B independientes?

b) Calcula P(AUB) y P(A∩B).

c) Calcula P(A|B).

d) Calcula $P(A^c \cap B^c)$.

e) Ignorando estos datos y aplicando únicamente la fórmula de probabilidad condicionada, que relación hay entre P(A|B) y P(B|A) (pon una en función de la otra).

f) Explica con tus palabras que significa que 2 sucesos sean independientes (pon un ejemplo con la baraja española de 2 sucesos que sean independientes y dos sucesos que no lo sean, invéntate la situación según lo necesites.

En este tipo de ejercicios se trabajarían las Técnicas 1,2 y 5.

Ejercicio tipo 3: Una caja A contiene 5 bolas blancas y 5 bolas negras, una caja B contiene 3 bolas blancas y 7 bolas negras. El experimento funciona de la siguiente manera:

Tiramos un dado de 6 caras, si sale un número par sacamos una bola de la caja A (sin remplazamiento) y si sale un número impar sacamos una bola de la caja B (sin remplazamiento).

Independientemente de la caja, si hemos sacado un bola blanca tiramos una moneda (cara =1, cruz = 2) y si sale una bola negra tiramos un dado.

a) ¿Qué es más probable, sacar una bola blanca o una bola negra?¿Por qué?

b) ¿El suceso sacar una bola blanca y sacar un número par (en el primer dado) son sucesos independientes?

c) ¿Qué número es más probable conseguir en el segundo lanzamiento del objeto que toque?

d) Si sumamos los puntos del dado + los puntos de la moneda/2º dado:

-¿Cuál es la probabilidad de obtener 8?

-¿Cuál es la probabilidad de obtener 5?

-¿Cuál es la probabilidad de obtener un número diferente de 12?

e) Si nos dicen que el 2º número que hemos obtenido es un 2, ¿Qué probabilidad hay de que la bola que hemos sacado fuera negra?¿Y blanca?

En este tipo de ejercicios se trabajarían las **Técnicas 1,2,4,5 y 6.**

Ejercicio tipo 4: En un concesionario tenemos coches de dos marcas: el 40% de ellos es Opel y el 60% es Fiat. Además de los Opel el 60% es azul y el 40% rojo, mientras que en los Fiat el 70% es rojo y el 30% azul. Si cogemos un coche al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un Fiat?, ¿y que sea un Fiat rojo?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea azul?

c) ¿Si sabemos que el coche escogido es rojo, que probabilidad hay de que sea un Fiat?

d) ¿Si sabemos que el coche escogido es Fiat, que probabilidad hay de que sea rojo?

NOTA: Deberás usar la Probabilidad Total y la Probabilidad condicionada entre otras herramientas.

En este tipo de ejercicios se trabajarían las **Técnicas 5 y 6.**

Ejercicio tipo 5: En el curso de 2ºBachiller hay un total de 200 alumnos. 105 de ellos son chicos y de estos 23 son zurdos. Además sabemos que 12 de las chicas también son zurdas.

Si escogemos a un alumno al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea zurdo?¿Cuál es la probabilidad de que sea una chica?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un chico zurdo?
c) Sabiendo que hemos escogido a una chica, ¿Cuál es la probabilidad de que sea zurda?

Si ahora escogemos a dos alumnos al azar diferentes:

d) ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos uno zurdo?
e) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los dos sea chica?

f) Sabiendo que el segundo es un chico, ¿Cuál es la probabilidad de que el primero haya sido chica?

En este tipo de ejercicios se trabajarían las **Técnicas 2,3,5 y 6.** Además este ejercicio permitirá al alumno a acostumbrarse a trabajar sin que le den las probabilidades de los sucesos más simples inicialmente.

Antes de enunciar la metodología merece la pena comentar que los ejercicios 3,4 y 5 son ejercicios tipo del examen PAU. Se ha tomado la decisión de trabajar bastante este tipo de ejercicios puesto que la única preocupación del alumnado (en general) en este curso tiende a ser el ir preparado correctamente a las pruebas PAU, por lo que centraremos nuestras clases en trabajar tanto este tema como el trabajar la adquisición de conocimientos, a partes iguales. Es decir a pesar de que nuestro objetivo es que el alumnado adquiera ciertos conocimientos no podemos obviar el hecho de que se van a enfrentar a una prueba externa, que como hemos visto es bastante estándar, por lo que parte de nuestros ejercicios y problemas irán enfocados a trabajar específicamente este último apartado intentando en la medida de lo posible no olvidar nuestro objetivo principal.

F.4 Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

-Primero se presentará el ejercicio a la clase y se hará un boceto de este en caso de que el enunciado sea demasiado complejo para el alumnado, el boceto será una explicación gráfica de lo que el ejercicio demanda.

-Se dejará a los alumnos unos 10-15 minutos en total para que resuelvan el ejercicio (más si el ejercicio es demasiado largo) y se irán haciendo incisos en la clase según vayan surgiendo errores que puedan ser comunes a muchos, o ideas interesantes que merezca la pena comenzar.

-Cuando consideremos que una parte grande de la clase ha resuelto algún apartado, este se corregirá en la pizarra y se hará una ronda de dudas, en caso de que alguien no entienda algún paso y/o lo haya hecho de otra manera. Esto nos permitirá por ejemplo repasar conceptos que veamos no han quedado claros.

Comentar por último que los apartados de los ejercicios no se han puesto en un orden aleatorio, sino que se han puesto en orden de dificultad creciente, de modo que los alumnos al menos serán capaces de hacer la primera mitad de los ejercicios sin demasiados problemas y afrontarán con más energía el resto de apartados, cosa que no ocurriría si se pusieran en otro orden ya que algunos podrían rendirse y no llegar a trabajar siquiera los apartados más asequibles.

G. Sobre las tecnologías.

G.1 ¿Mediante qué razonamientos se van a justificar las técnicas?

De las técnicas que se han ido comentando y que se van a trabajar en el aula, son muchas las que pueden ir acompañadas de tecnologías, pero teniendo en cuenta el curso en el que estamos, el tiempo del que disponemos, la actitud que presumiblemente tendrá el alumno de cara a que les presentemos lo que ellos consideraran seguramente como "contenidos que no entran para las PAU", pensamos que la mejor opción que podemos tomar es la siguiente.

En vez de tratar de presentar tecnologías con el fin de que el alumnado se las aprenda o con el único fin de justificar la veracidad de una técnica, el enfoque que le daremos a las tecnologías que presentemos será aclaratorio; es decir lo que importará será más el discurso e ideas asociadas a la tecnología que lo que justifica en sí. Lo que pretendemos por tanto es que las tecnologías ayuden al alumnado tanto a comprender mejor la Probabilidad, como entender mejor el significado de la técnica, de modo que entiendan porqué se aplica, como el mejorar la memorización de dicha técnica.

Los razonamientos que justificarán la teoría serán los siguientes:

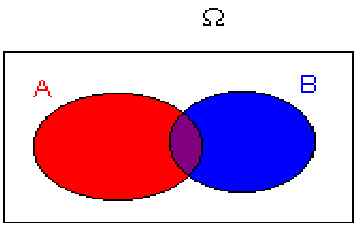
-**Justificación 1** ; $P(A^c)$ ó $P(\bar{A})$: El alumnado ya debería conocer cuál es la fórmula que relaciona la probabilidad de un suceso y su complementario, pero por si acaso y puesto que consideramos que el razonamiento que lleva detrás esta técnica es muy interesante al alumnado se le presentaría un razonamiento similar al que sigue:

Sabemos que $P(E) = 1$, y también sabemos que $E = A \cup A^c$ independientemente de que suceso tomemos como A, es decir sabemos que $P(A \cup A^c)=1$. Si ahora aplicamos el tercer Axioma de Kolmogorov tenemos que $1=P(A)+P(A^c)$ y por tanto $P(A^c)=1-P(A)$.

-Justificación 2 ; $P(AUB)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$: El razonamiento que presentaríamos al alumnado sería algo similar a lo que sigue:

Se le presentaría el dibujo anterior y se la fórmula $P(AUB)=P(A)+P(B)$ les parece correcta, en caso afirmativo se les haría ver que se está contando 2 veces la parte $A\cap B$. En caso de que no terminase de quedar claro esto o de que no terminarán de aceptar esta fórmula se les pondría el ejemplo del lanzamiento de un dado donde el suceso A sea sacar un 1 o un 2 y el suceso B sacar un 2 o un 3.

-Justificación 3; Fórmula de la Probabilidad condicionada: El alumnado debería conocer de antemano esta técnica, pero debido a la gran importancia que va a tener a la hora de introducir nuevos contenidos necesitamos asegurarnos de que el alumnado la entienda y la recuerde. Por lo que para intentar que el alumno no solo recuerde la fórmula $P(B|A)=P(A\cap B)/P(A)$ sino que la entienda se le explicará algo similar a lo siguiente:



Se les presentará este dibujo y se les dará el siguiente razonamiento: $P(B|A)$ es la probabilidad de que ocurra el suceso B sabiendo que ya ha ocurrido el suceso A, o lo que es lo mismo de todos los casos en los que ha sucedido A cuál es la probabilidad de que también haya sucedido B; es decir: este número es casos $(A\cap B)$/casos A y por tanto

$P(B|A)=P(A\cap B)/P(A)$. Además de esta igualdad deduciremos que :

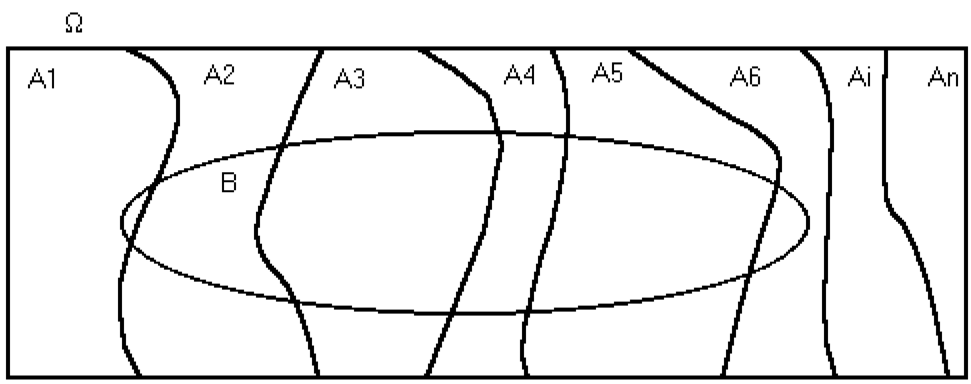
$P(A\cap B)= P(A)P(B|A)$ que nos será útil para el razonamiento asociado al Teorema de la Probabilidad Total.

-**Justificación 4**; Noción de independencia: El alumnado debería entender este concepto y como comprobar cuando dos sucesos lo son, pero por si acaso se les presentará un razonamiento parecido al siguiente.

Dos sucesos son independientes cuando el hecho de que ocurra el primero NO influye en absoluto para bien o para mal que ocurra el segundo. Por ejemplo: sacar un 1 en la primera tirada de un dado es independiente de sacar un 6 en la segunda tirada de un dado. Luego como estos dos sucesos no están influidos entre sí, la probabilidad de que ocurran los 2 será la probabilidad de que ocurra el primero multiplicado por la probabilidad de que ocurra el segundo; es decir si A y B son independientes:

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$ y aplicando este hecho a la probabilidad condicionada tendremos que: $P(A|B)=P(A)$ y que $P(B|A)=P(B)$. Si dos sucesos cumplen alguna de estas 3 fórmulas diremos que dichos sucesos serán independientes, es decir, estas fórmulas nos servirán para comprobar si dos sucesos son en realidad independientes o no.

-**Justificación 5** ;Teorema de la Probabilidad Total: Una vez presentada la fórmula se les presentará este dibujo como modo de aclararles la utilidad y significado de esta técnica. El razonamiento que se les presentará será hacerles ver que cada sumando corresponde a un "trozo" de B.



-**Justificación 6** ;Teorema de Bayes: $P(A_i|B)=\frac{\mathbf{P(B|Ai)P(Ai)}}{\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P(B}|A_k)P(A_k)}$ donde A_i son una familia de sucesos independientes cuya unión es el suceso total. Esta sería una posible introducción teórica que preferiríamos evitar hacer puesto que el Teorema de Bayes es una consecuencia inmediata(del Teorema de la Probabilidad Condicionada) del Teorema de la Probabilidad Total. Por lo que en caso de presentarle esta fórmula al alumnado se le presentará como consecuencia de estas dos técnicas y no como una fórmula incorrelada de estas.

G.2 ¿Quién (profesor, alumnos, nadie) va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?

La justificación de las técnicas que hemos nombrando se hará de una forma más intuitiva que formal o viceversa dependiendo del objetivo que persigamos con la presentación de dicha técnica. En general será el propio profesor el que justifique las técnicas, no todas como ya hemos comentado, aunque también puede ser el propio alumnado el que las presente si es que las conoce.

G.3–G.4 Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Teniendo en cuenta el nivel de dificultad, en cuánto a contenidos matemáticos en que nos hallamos, el proceso de institucionalización de los distintos aspectos matemáticos seguirá en términos generales el siguiente orden:

Primero se presentará alguno de los problemas que motiven la introducción del objeto matemático con el fin de hacer ver al alumnado que se necesitan más herramientas (técnicas) de las que poseen en la actualidad. O en caso de que sea una técnica que ya conocen servirá esto para que recuerden la necesidad de esta.

Segundo; se definirá el objeto y se harán unos pequeños ejemplos donde se pueda ver la utilidad de este.

Tercero; una vez entendida la utilidad del objeto se presentará este formalmente, dando tanto las técnicas y procedimientos asociadas a este.

Cuarto; dependiendo del objeto matemático con el que tratamos se presentarán las tecnologías asociadas a este. Mencionar que este cuarto paso podrá ser también el tercero dependiendo de si lo que queremos es justificar una técnica o ayudar al alumnado a comprenderla.

Quinto; se trabajará en ejercicios y problemas donde el alumnado pueda poner en práctica la herramienta adquirida.

Sexto (no siempre); en caso de que algún alumno no se “termine” de creer la técnica y no se haya presentado una tecnología por no considerarlo necesario, el profesor podrá optar por dos opciones: resolver el problema mediante otra técnica conocida o aceptada por el alumnado para que vea que usando la nueva técnica el resultado no varía, o bien se puede hacer uso de las tecnologías asociadas a dicha técnica, aunque si no entra dentro de las que habíamos previsto explicar a la clase lo mejor sería explicárselo aparte o al finalizar la clase, de modo que no se pierda excesivo tiempo.

H. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma.

H.1 – H.2 Indica la secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores. Establece una duración temporal aproximada.

Sesión	Contenidos	Actividades
1	CPR de sucesos y operaciones con sucesos.	Actividad 1 como evaluación inicial.
2	Operaciones con sucesos. CPR propiedades de la probabilidad. Idea intuitiva de la Ley de los Grandes Números.	Ejercicios tipo 1. Problemas tipo 1.
3	Definición de Probabilidad, propiedades de la Probabilidad.	Ejercicios tipo 1 y tipo 2; problemas tipo 1 y problemas tipo 2.
4	Probabilidad condicionada, sucesos independientes y CPR	Actividad 2 como comprobación conocimientos previos han sido adquiridos. Corrección de esta. Problemas tipo 3.
5	Probabilidad condicionada y sucesos independientes.	Ejercicios tipo 2 y tipo 3.
6	Diagrama de árbol, CPR. Introducción Teorema de la Probabilidad Total.	Resolución resto de apartados Problema 2. Presentación y trabajo del Problema 1.
7	Teorema de la Probabilidad Total.	Problemas tipo 3. Ejercicios tipo 3 y tipo 4.
8	Teorema de la Probabilidad Total y Teorema de Bayes.	Problemas tipo 4. Ejercicios tipo 4 y 5.
9	Resolución de dudas.	Problema tipo 4. Ejercicios y problemas relativos a las dudas.
10	Evaluación (prueba escrita).	Prueba de evaluación de la consecución de los objetivos.
11	Corrección prueba escrita.	Corrección del examen atendiendo a las distintas respuestas dadas por el alumnado. Comunicación de los resultados.

CPR=Contenidos previos relacionados.

Cuando en los contenidos decimos que vamos a trabajar cierto contenido matemático, esto implica que también trabajaremos las técnicas y tecnologías asociadas a estos aunque no lo explicitemos.

Cuando ponemos ejercicio tipo o problema tipo nos referimos a trabajar en ejercicios/problemas que permitan trabajar las características antes mencionadas, no tienen por qué ser exactamente estos, aunque mantendrán en general la estructura. A su vez el decir que trabajaremos ejercicios/problemas de cierto tipo no significa que se vayan a trabajar exactamente todas las características, se trabajaran las relativas a los contenidos que se estén viendo. En la sesión 6, es cuando se introducirá el segundo problema que será la razón de ser para los nuevos contenidos que pretendemos presentar al alumnado. La metodología que se seguirá queda descrita en el apartado **G3–G4.**

En caso de que en la sesión 9 no haya dudas, se les hará trabajar sobre ejercicios que les lleven al límite, en el sentido de que nos permitirá comprobar si verdaderamente han asimilado y entendido los contenidos.

I. Sobre la evaluación.

I.1 Diseña una prueba escrita (de una duración aproximada de una hora) que evalué el aprendizaje realizado por los alumnos.

Pregunta 1 (*0,5 puntos cada apartado*). En un pueblo, viven 3 generaciones. De entre todas estas personas algunos llevan gafas y otros no.

Gafas\ Generación	Joven	Adulta	Vieja
No gafas	73	40	10
Si gafas	27	60	30

A raíz de la anterior tabla anterior, responde a las siguientes preguntas:

a) Si escogemos una persona al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que sea vieja y no lleve gafas?

b) Si escogemos una persona al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que no sea vieja pero si lleve gafas?

c) Escogiendo a una persona al azar de los que llevan gafas, ¿Cuál es la probabilidad de que no sea joven?

d) Si escogemos dos personas al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 1 sea adulta?

Pregunta 2 (*0,6 puntos cada apartado*). Sabemos que dos sucesos independientes A y B tienen la siguiente probabilidad de ocurrir: P(A) = 0.3 P(B) = 0.5 NOTA: *En caso de que no sepas como hacer cierto apartado y necesites dichos datos, llama con una letra a dicho dato y déjalo indicado.*

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no ocurra A?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el suceso A y el suceso B?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el suceso A o el suceso B?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que no ocurra el suceso A y no ocurra el suceso B?

e) Sin hacer cálculo numérico, calcula P(A|B) y P(B|A).

Pregunta 3 (*3puntos*). En una feria nos encontramos con el siguiente juego. Tiramos un tetraedro (pirámide de 4 caras iguales) y el número que sale (0,1 ,2 ,3)es el número de bolas negras que se mete en una caja con dos bolas blancas. Tras esto se saca una bola de la caja.

a) Si hemos sacado un 2, ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola blanca? (***0,5 puntos***).

b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola negra? (***1,25 puntos***).

c) Sabiendo que hemos sacado una bola blanca, ¿Cuál es la probabilidad de que hubiéramos obtenido un 3? (***1,25 puntos***).

Pregunta 4 (*1 punto cada apartado*).Responde a las siguientes preguntas a partir del siguiente juego. Estáis 3 amigos, y una persona a vosotros os dice que intentéis adivinar qué número de entre 1-2-3-4 está pensando él. NOTA: Puede ser que no acierte nadie; si fallan los 3 no responde nadie más.

a) Razona si preferirías responder primero, segundo o tercero.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que al jugar 3 veces al menos hayáis acertado el número (alguno de los 3) 1 vez?

I.2 ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?

Al alumno en cada una de las preguntas se le exigirá lo siguiente:

-Pregunta 1: Entender los enunciados y los sucesos descritos en este. Entender el significado de la Probabilidad condicionada y del suceso contrario.

-Pregunta 2: Conocer los Axiomas de Kolmogorov y las propiedades derivadas de estos. Saber calcular la probabilidad de diferentes operaciones con sucesos. Entender lo que implica que dos sucesos sean independientes.

-Pregunta 3: Conocer el Teorema de la Probabilidad Total. Saber desarrollar el Teorema de Bayes a través del Teorema de la Probabilidad Total o conocerlo directamente.

-Pregunta 4: Entender los enunciados descritos y no sacar conclusiones precipitadas de este. Buscar entre los contenidos conocidos sobre la Probabilidad los más adecuados para resolver el problema.

I.3-I.4¿Qué respuestas esperas en cada una de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos? Qué criterios de calificación vas a emplear?

En esta pregunta desarrollaré las posibles respuestas correctas que creo el alumno dará, aunque puede haber más, y también comentaré los fallos que espero encontrarme en la resolución de las mismas.

Pregunta 1. Respuestas posibles y errores.

a) P(Viejo ∩ No gafas) = 10/240

b) P(Viejo^c ∩ Si gafas) = P(Joven ∩ Si gafas) + P(Adulto ∩ Si gafas) = (27 + 60)/ 240

c) P(Joven^c | Si gafas) = P (Joven^c ∩ Si gafas)/P(Si gafas) = 90/117

= 1- P(Joven|Si gafas) = 1 – 27/117 = 90/117

d) **P(Adulto ≥ 1)** = P(Adulto = 1) + P(Adulto = 2) =

P(Adulto (1,0)) + P(Adulto (0,1)) + P(Adulto = 2) = $\frac{100}{240}\frac{140}{239} + \frac{140}{240}\frac{100}{239} + \frac{100}{240}\frac{99}{239}$ = 0,66074

P(Adulto ≥ 1) = 1- P(Adulto = 0) = 1 - $\frac{140}{240}\frac{139}{239}$ = 0,66074 Intuyo que solo los alumnos que hayan entendido verdaderamente los contenidos se decantarán por esta segunda fórmula.

-Posibles errores: Los fallos que creo podrá haber son algunos de los siguientes.

No entender que cuándo se habla del suceso no sea viejo pero si lleve gafas se habla del suceso intersección.

En el apartado C, no tener en cuenta que la nueva muestra son las personas que si llevan gafas y usar la totalidad de la muestra para el cálculo.

No darse cuenta en la primera forma de resolverlo del apartado D que cuándo solo sale un adulto de las dos personas, este ha podido salir en primer o en segundo lugar.

Intentar solucionar el problema por otro método que no sea la Regla de Laplace, por ejemplo calcular numéricamente la probabilidad de ser viejo, joven, adulto, las intersecciones, etc. y acabar malinterpretando la notación o en su defecto arrastrar errores de cálculo.

-Criterios de calificación por apartados:

a) Respuesta/razonamiento correcto **0,5** ; respuesta/resultado incorrecto **0**.

b) Respuesta/razonamiento correcto **0,5** ; error de cuentas **-0,25**.

c) Respuesta/razonamiento correcto (esto implica tomar como población total los que llevan gafas, sino se hace esto se puede anular el apartado) **0,5** ; error de cuentas -**0,25**

d) Respuesta/razonamiento correcto **0,5**; dejarse algún caso/errores cuentas -0,25.

NOTA (común a todas las preguntas): Los errores que puedan darse a raíz de errores de apartados anteriores NO se tomarán como errores de este apartado. Salvo si son cometidos a raíz de resultados incoherentes con la probabilidad, en ese caso se podrán anular los apartados donde se use dicho resultado.

Pregunta 2. Respuestas posibles y errores

a) $P(A^c) = 1-P(A)= 1-0,3 = 0,7$

b) **P(A∩B)** = P(A)P(B)= 0,15 por ser sucesos independientes.

P(A∩B) = P(A|B)P(B)=P(A)P(B) por ser sucesos independientes.

P(A∩B) = P(B|A)P(A)=P(B)P(A)

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0,3 + 0,7 -0,15 = 0,85$

d) $P(A^c \cap B^c) = 1- P(AUB) = 1-0,85 = 0,15$ Razonamiento bien mediante dibujo o bien justificándose en las leyes de Morgan.

e)**P(A|B)** = P(A) Puesto que A y B son independientes y por tanto el hecho de que ya haya ocurrido B no afecta en nada a que ocurra A.

P(A|B) = P(A∩B)/P(B) = P(A)P(B)/P(B) =P(A) Aplicando que A y B son independientes y por tanto la probabilidad de su intersección es el producto de las probabilidades individuales.

Intuyo que los alumnos con mayor conocimiento de los contenidos se decantarán por la segunda respuesta.

-Posibles errores:

Desconocimiento de las implicaciones que tiene que dos sucesos sean independientes, y los consiguientes razonamientos generados a raíz de este desconocimiento y que intentarán justificar la imposibilidad de resolver los apartados o justificarán una solución errónea.

En probabilidad de la unión de los suceso, olvidarse de restar la probabilidad de la intersección.

Justificar el apartado e) mediante cálculos numéricos y no mediante razonamientos.

-Criterios de corrección por apartados:

a) Respuesta correcta **0,6**; respuesta incorrecta **0**.

b) Respuesta/razonamiento correcto **0,6** ; error de cuentas **-0,2**; respuesta incorrecta (no usar el hecho de que son sucesos independientes) **0**.

c) Respuesta/planteamiento correcto (saber la fórmula) **0,6** ; error de cuentas**-0,2**; respuesta incorrecta **0** ;

d) Razonar a que suceso equivale el dado **0,3** ; saber calcular el suceso anterior **0,3**; error de cuentas **-0,2**.

e) Razonamiento correcto o desarrollo de la forma sin sustituir numéricamente **0,6** ; respuesta basada en desarrollo de la forma sustituyendo **0,2**.

Pregunta 3. Respuestas posibles y errores

a) P(Blanca|2) = 1/2 Si hemos sacado un 2, tenemos en la caja dos bolas blancas y dos negras, luego la probabilidad de sacar una bola blanca es la mitad.

b) P(Negra) = P(0)P(N|0) + P(1)P(N|1)+P(2)P(N|2)+P(3)P(N|3) = 0 + $\frac{1}{4}\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\frac{3}{5}$

c) **Cálculo de P(3|B)** ; P(3|B)P(B)=P(3)P(B|3); P(3|B)= $\frac{1}{4}\frac{2}{5}/(1-P(Negra))$

Otra forma: Aplicación de la fórmula del Teorema de Bayes.

Intuyo que los alumnos con mayor conocimiento de los contenidos se decantarán por la primera respuesta, que es la que permite bien si se ha entendido o no el origen de la fórmula del Teorema de Bayes.

-Posibles errores:

Confundir la probabilidad condicionada de dos sucesos con la intersección de dos sucesos.

Suponer que algunos son independientes y que en realidad no lo sean.

Intento de aplicar la Regla de Laplace por desconocimiento del Teorema de la Probabilidad Total, llevando esto a que por ejemplo se dejen casos.

-Criterios de corrección por apartados:

a) Respuesta/razonamiento correcto **0,5** ; error de cuentas **-0,25**; respuesta incorrecta **0**.

b) Conocimiento de la fórmula de la Probabilidad Total / razonamiento correcto que le puede llevar a la solución **1,25** ; Dejarse algún caso **-0,5** (**0** si se deja más) ; error de cuentas **-0,25**.

c) Conocimiento de la fórmula de Bayes / razonamiento correcto que le puede llevar a la solución (esto incluye poner la fórmula P(3|B)P(B)=P(3)P(B|3) y despejar) **1,25** ; no calcular P(B) **-0,5**; error de cuentas **-0,25**.

Pregunta 4. Respuestas posibles y errores

-Posibles respuestas correctas:

a) **P(Gane 1º)** = 1/4 ; **P(Gane 2º)** = P(Falle 1º)P(Acierte 2º |Falle 1º) = $\frac{3}{4}\frac{1}{3}$ = 1/4

P(Gane 3º) = P(Falle 1º y 2º)P(Acierte 3º|Falle1º y 2º)=

P(Falle1º)P(Falle2º|Falle1º)P(Acierte3º|Falle 1º y 2º)= $\frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Luego no importa en qué lugar te toque, todos tienen la misma probabilidad.

Otra posible forma de solucionarlo sería igual que lo anterior pero explicitando los pasos de palabra en vez de con fórmulas.

b) Como tenemos 3 intentos y hay 4 números acertaremos 3/4 veces y fallaremos 1/4. Y como las partidas no influyen, estas serán independientes entre sí.

P(Acertar ≥ 1) = 1-P(Acertar = 0) = 1- $\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4}$= 63/64

Ver las 3 partidas como una terna, y poner 1 si se acierta y 0 si se falla.

P(Acertar≥1)=P(1,0,0)+P(0,1,0)+P(0,0,1)+P(1,1,0)+P(1,0,1)+P(0,1,1)+P(1,1,1)

$= 3\frac{3}{64} + 3\frac{9}{64} + \frac{27}{64} = \frac{63}{64}$

-Posibles errores:

No darse cuenta de que las partidas son independientes.

No tener en cuanto que para que el 2º o 3º respondan han tenido que fallar los anteriores.

Olvidarse algún caso en el apartado b) si se hace de la segunda forma.

-Criterios de corrección por apartados:

a) Razonamiento/respuesta correcta (el alumno deberá tener en cuenta las 3 opciones posibles, en caso contrario se puede anular este apartado) **1**; error de cuentas -**0,25**.

b) Calculo de la probabilidad de acertar/fallar todos en una partida **0,5** ; plantear el problema **0,5** ; error de cuentas **-0,25** ; olvidar algún caso **-0,1(-0,25** si se deja 2, **-0,5** si se deja 3 o más). NOTA: Si calcula bien la probabilidad de acertar en una partida/fallar todos en una partida como mínimo se pondrá **0,5** ; independientemente de lo que ponga después.

J. Sobre la bibliografía y páginas web.

- Nortes, A., Jiménez, P., Lozano, F., Miñano, A. y Ródenas, J. (2003). Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales. Editorial Santillana.

-Colera, J. , García, R. y Oliveira M. J. (2003) Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II. Editorial Anaya.

- Escoredo, A., Gómez, M. D., Lorenzo, J., Machín, P., Pérez, C., Rey, M. J., del Río, J. y Sánchez, D. (2009) Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II. Editorial Santillana.

-*http://revistasuma.es*

-https://www.wikipedia.org

-http://cipri.info/resources/HIST-1-1-6-probabilidad.pdf

-catedu.es/calendas/TTM16quetejugas.rar

-www.uv.es

-http://wzar.unizar.es/servicios/acceso/accespau/exame/exame.html

-http://www.vitutor.com/

ANEXO

Septiembre 2015; Opción A pregunta 3.

Disponemos de los siguientes datos sobre el uso de nuevas tecnologías por parte de los estudiantes de una universidad: un 70% de los estudiantes de esa universidad tiene teléfono inteligente, un 50% de los estudiantes de esa universidad tiene ordenador portátil y un 40% de los estudiantes de esa universidad tiene ambos dispositivos (teléfono inteligente y ordenador portátil).

a) (1 punto) Si elegimos al azar un estudiante de esa universidad, ¿cuál es la probabilidad de que tenga al menos uno de los dos dispositivos?

b) (1 punto) Si elegimos al azar un estudiante de entre los que tienen teléfono inteligente, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga ordenador portátil?

c) (1 punto) Sea A el suceso "el estudiante tiene teléfono inteligente" y B el suceso "el estudiante tiene ordenador portátil", ¿son los sucesos A y B independientes?

Y ahora escribiré el enunciado de un ejemplo resuelto que aparece en el libro de Santillana de 2009 página 266:

En una ciudad, el 60% de sus habitantes es partidario de hacer el centro peatonal, el 30% de restringir el tráfico en la zona centro y el 25% de compaginar ambas medidas: cortar el tráfico en algunas calles y restringirlo a otras.

a) Si una persona es partidaria de hacer el centro peatonal, ¿Cuál es la probabilidad de que también sea partidaria de restringir el tráfico?

Sí que es cierto que en dicho libro no se encuentra ningún problema resuelto con exactamente la misma estructura de enunciado y las mismas preguntas, pero si aparecen diferentes ejercicios resueltos con la misma estructura de enunciado y que contestan a los diferentes apartados.